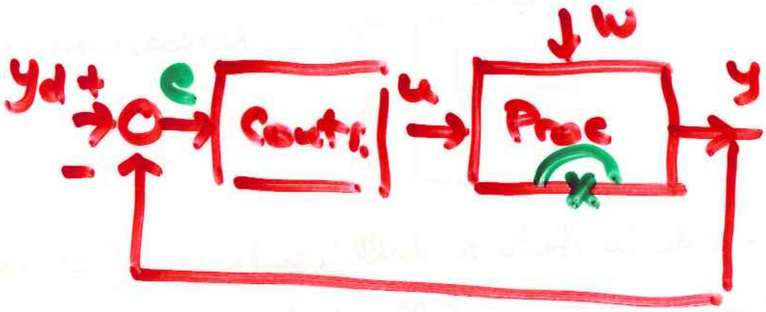
CONTROLLO basato sullo SPAZIO di STATO

Processo
$$\dot{x} = Ax + Bu + Pw$$
$$y = Cx + Du + Qw$$

$x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m \quad y \in \mathbb{R}^p \quad (p \leq m)$



controllore istantaneo $\quad u = Ke$

" dinamico
$$\dot{\xi} = F\xi + Ge \qquad \xi \in \mathbb{R}^\nu$$
$$u = H\xi + Le$$
$$\Updownarrow$$
$$C(s) = L + H(sI - F)^{-1}G$$

* regime permanente ② $\Leftrightarrow$ REGOLAZIONE dell'uscita
* regime transitorio ① ($\Leftrightarrow$ stabilità asintotica)

$$\downarrow$$

$$y_d = 0 \qquad (e = -y)$$

PRINCIPIO DI SEPARAZIONE

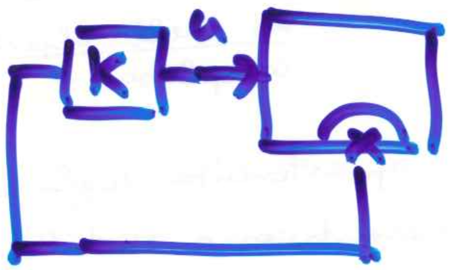
i) REAZIONE DALLO STATO x

ii) OSSERVATORI dello STATO x dall'uscita y

Problemi di ASSEGNAZIONE degli AUTOVALORI (con reazione dello stato)

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (\cancel{y = Cx})$$

$$u = Kx \qquad \text{FEEDBACK}$$



$$\dot{x} = (A + BK)x = A_{cl}\, x$$

? Quando $\exists K : \sigma(A_{cl}) = \sigma^*$

? Come ricavare K

<u>Risposta</u> $\exists K \iff (A, B)$ <u>raggiungibile</u>

$$\Updownarrow$$

$$\rho\,[B\ \ AB\ \ A^2B \dots A^{n-1}B] = n$$

Dim

necessità

Se (A,B) non è raggiungibile $\rightarrow$ dec. Kalman
(risp. raggiungibilità)

$\exists\, T$ invertibile $\quad x \rightarrow z = Tx \quad \dot{z} = \hat{A} z + \hat{B} u$

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array}$$

$$\hat{B} = TB = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{m} \updownarrow p$$

generica $\quad \hat{K} = KT^{-1} = [\tilde{K}_1 \;\; \tilde{K}_2]$

$$\dot{z} = \underbrace{(\hat{A} + \hat{B}\tilde{K})}_{\hat{A}_{cl}} z = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} + \hat{B}_1 \tilde{K}_1 & \tilde{A}_{12} + \hat{B}_1 \tilde{K}_2 \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} z$$

$$\tilde{p}(\lambda) = \det(\lambda I - (\hat{A}_{11} + \hat{B}_1 \hat{K}_1)) \cdot \det(\lambda I - \hat{A}_{22})$$

Suff. (un ingresso) $m = 1$

F. Canonica di Controllo $\quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A_c)$$

$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

$$\underset{n\times n}{A_c} + \underset{n\times 1}{b_c}\,\underset{1\times n}{k_c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0+k_1 & \dots & \dots & -a_{n-1}+k_n \end{bmatrix}$$

$$k_c = [k_1 \dots k_n]$$

$$p^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n) =$$

$$\sigma^* = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$$

$$= \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

$$\Rightarrow k_c = [a_0 - \alpha_0 \quad a_1 - \alpha_1 \quad \dots \quad a_{n-1} - \alpha_{n-1}]$$

per generiche (A,b) (ma raggiungibili)

$$u = \underbrace{K}x = \longrightarrow = K_c x_c = \underbrace{K_c T_c}x$$

$$x_c = T_c x$$

$$T_c = \begin{bmatrix} g \\ gA \\ gA^2 \\ \vdots \\ gA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$g =$ ultima riga di R^{-1}

$R = [\, b \; Ab \; \ldots \; A^{n-1}b \,]$

(dim. Teoria dei Sistemi)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} - - - \\ - - - \\ - - - \\ g \end{bmatrix}}^{R^{-1}} \cdot R = \begin{bmatrix} I \\ 0\,0\,0 \ldots 1 \end{bmatrix}$$

$\dot{x} = Ax + bu$

$$n \left\{ \begin{aligned} y &= gx \\ \dot{y} &= g\dot{x} = gAx + \cancel{gb}\,u \\ \ddot{y} &= gA\dot{x} = gA^2x + \cancel{gAb}\,u \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} &= gA^{n-1}x + \cancel{gA^{n-2}b}\,u \end{aligned} \right.$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = T_c x$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = gA^n x + \underbrace{gA^{n-1}b}_{1}\,u$$

$$\boxed{K} = K_c T_c$$

$$= [a_0 - \alpha_0 \; \dots \; a_{n-1} - \alpha_{n-1}] \begin{bmatrix} g \\ gA \\ \vdots \\ gA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= [a_0 \; \dots \; a_{n-1}] \begin{bmatrix} g \\ gA \\ gA^{n-1} \end{bmatrix} - [\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}] \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$= g(a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1})$$

T. Cayley Hamilton

$$- g(\alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1})$$

$$p(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n$$

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n \equiv 0$$

$$= -g[\alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} + A^n]$$

$$\boxed{= -g \cdot p^*(A)}$$

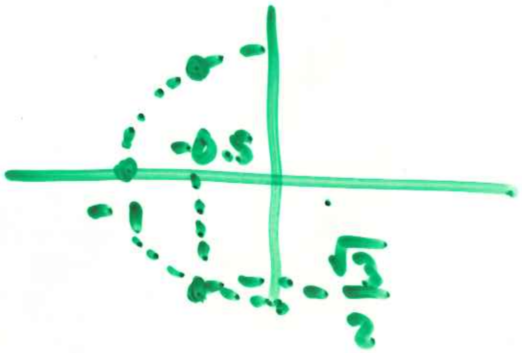
formula di Ackermann

Ex

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = Ax + bu$$

assegnare $\sigma^* = \{-1, -0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

Butterworth



"buone" per ridurre la sovraelongazione nella risp. indiciale

raggiungibilità

$$R = [b \;\; Ab \;\; A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\rho(R) = 3 = n$!! ok

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow g$$

$$K = -g\, p^*(A)$$

$$p^*(\lambda) = (\lambda+1)\left(\lambda+0.5+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\lambda+0.5-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$p^*(A) = A^3 + 2A^2 + 2A + I$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\ldots \quad p^*(A) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = -g\, p^*(A) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} p^*(A)$$

è l'unica!

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad !$$

<u>verifica</u>!

$$A + BK = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(\lambda I - (A+BK)) = p^*(\lambda) \ ?$$

sì

se il sistema non è raggiungibile

$$\rho(\mathcal{R}) = p < n$$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \overset{p \times p}{\boxed{\tilde{A}_{11}}} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad \tilde{x} = Tx$$

$$u = [\tilde{K}_1 \;\; \tilde{K}_2]\, \tilde{x} = [\tilde{K}_1 \;\; \tilde{K}_2]\, T x = Kx$$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_1 & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_2 \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$\tilde{K}_1$ è unico per spostare gli autovalori di $\tilde{A}_{11}$ in p locazioni desiderate

CN&S stabilizzazione è $\sigma(\tilde{A}_{22}) \subset \mathbb{C}^-$

Test di PBH (Hautus)

$$\rho[\underbrace{A - \lambda I}_{n \times n} \;\; \underbrace{B}_{n \times m}]\Big|_{\lambda = \lambda_i} = n \iff \lambda_i \text{ raggiungib.}$$

$$\rho[A - \lambda I \;\; B]\Big| = n \quad \forall \lambda = \lambda_i \text{ con } Re[\lambda_i] \geq 0$$

ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} \qquad \beta \text{ arbitrario}$$

assegnabilità?

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 1-2\beta \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \beta = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \rho(R) = 1 < 2 \\ \beta \neq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{raggiungibilità} \end{cases}$$

stabilizzabilità?

$$\rho \left[A - \lambda I \,\vdots\, b \right]_{\underline{\lambda = 1}} = \rho \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & \beta \end{array} \right] = 2 = n \quad \forall \beta$$

$\underline{\text{ok}}$!

$$\rho \left[A - \lambda I \,\vdots\, b \right]_{\lambda = -2} = \rho \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \beta \end{array} \right] = \begin{cases} \beta \neq \frac{1}{3} & \rho = 2 \\ \beta = \frac{1}{3} & \rho = 1 \end{cases}$$

---

a casa: $[k_1 \ k_2]$

$$A + bk \qquad \det(\lambda I - (A + bk))$$

$$= \lambda^2 + \alpha_1(k_1, k_2)\lambda + \alpha_0(k_1, k_2)$$

$$\sigma^* = \{-2, -\delta\} \rightarrow p^*(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + \delta)$$

ex

$$A + bk = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+k_1 & k_2 \\ 1+\frac{k_1}{3} & -2+\frac{k_2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A+bk)) = \det \begin{bmatrix} \lambda-(1+k_1) & -k_2 \\ -\left(1+\frac{k_1}{3}\right) & \lambda+2-\frac{k_2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 + \left[1-k_1-\frac{k_2}{3}\right]\lambda - 2\left[1+k_1+\frac{k_2}{3}\right]$$

Paragona con $(\lambda+2)(\lambda+\delta) = \lambda^2 + (2+\delta)\lambda + 2\delta$ con δ arbitrario :

$$\begin{cases} 2+\delta = 1-k_1-\frac{k_2}{3} \\ 2\delta = -2\left(1+k_1+\frac{k_2}{3}\right) \end{cases} \rightarrow \quad \delta = -\left(1+k_1+\frac{k_2}{3}\right)$$

1 unica condizione

quindi esistono ∞ combinazioni (k_1, k_2) che risolvono per un dato δ, ad. es.

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -3(1+\delta)$$

oppure $\quad K_1 = -(1+\delta), \quad k_2 = 0$